Acta Sci. Math., 54 (1990), 355—365

Schmidtsche Umkehrbedingungen für Potenzreihenverfahren

HUBERT TIETZ

1. Einleitung

Es sei $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge nichtnegativer Zahlen mit $p_0>0$, für welche die Reihe

$$p(x) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \tag{1.1}$$

den Konvergenzradius 1 hat und

$$P_n := p_0 + \ldots + p_n \to \infty \tag{1.2}$$

gilt. Die Folge $s=\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ komplexer Zahlen heißt *J_p-limitierbar zum Wert* σ (J_p-$\lim s_n=\sigma$), wenn die Reihe

$$p_s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n \tag{1.3}$$

für $0<x<1$ konvergiert und $\lim\limits_{x\to 1-} p_s(x)/p(x)=\sigma$ gilt. Die Folge s heißt *M_p-limitierbar zum Wert* σ (M_p-$\lim s_n=\sigma$), wenn

$$t_n := \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^{n} p_k s_k \to \sigma \tag{1.4}$$

gilt. Bekanntlich sind die Verfahren J_p und M_p (wegen (1.2)) permanent, d. h., sie limitieren jedes $s\in c$, dem Raum der konvergenten Folgen, zum Wert $\lim s_n$, und aus M_p-$\lim s_n=\sigma$ folgt stets J_p-$\lim s_n=\sigma$ (ISHIGURO [6]), aber nicht umgekehrt. Unter geeigneten zusätzlichen Bedingungen für die Folge s kann man jedoch von M_p-$\lim s_n=\sigma$ auf $\lim s_n=\sigma$, von J_p-$\lim s_n=\sigma$ auf M_p-$\lim s_n=\sigma$ oder sogar von J_p-$\lim s_n=\sigma$ auf $\lim s_n=\sigma$ zurückschließen. Solche Bedingungen heißen *Umkehr-* oder *Tauber-Bedingungen.* Etwas genauer werden wir eine derartige Bedingung, falls einer der eben genannten Fälle vorliegt, eine *Tauber-Bedingung* (TB) *vom*

Eingegangen am 3 Dezember 1987.

$M_p \to c$-Typ, *vom* $J_p \to M_p$-Typ bzw. *vom* $J_p \to c$-Typ nennen. Zum Beispiel ist für $p_n :\equiv 1$ (das *Potenzreihenverfahren*) J_p das *Abel-Verfahren* A. Hierfür gilt der folgende Satz von SCHMIDT [23; Theorem X und Theorem XI].

Satz S. *Die Bedingung* $\liminf (s_n - s_m) \geqq 0$ *(falls die* s_n *reell sind bzw.* $\lim (s_n - s_m) = 0$, *falls die* s_n *komplex sind) für* $n/m \to 1$ *mit* $n > m \to \infty$, *ist eine* TB *vom* $A \to c$-Typ.

Aus Satz S erhält man auf einfache Weise die beiden im nachfolgenden Satz enthaltenen Resultate von LITTLEWOOD [17] bzw. HARDY and LITTLEWOOD [4; Theorem 11]. (Wie stets im folgenden sei $s_{-1} := 0$ und $a_n := s_n - s_{n-1}$ für $n = 0, 1, \dots$.)

Satz HL. *Die Bedingung* $na_n = O_L(1)$ *(falls die* s_n *reell sind bzw.* $na_n = O(1)$, *falls die* a_n *komplex sind) ist eine* TB *vom* $A \to c$-Typ.

Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist die Verallgemeinerung der Sätze S und HL für eine große Klasse von Verfahren J_p (Sätze 3.9 und 4.1). Alle dem Verfasser bekannten Sätze mit Tauber-Bedingungen dieser Art sind in den Sätzen 3.9 bzw. 4.1 als Spezialfälle enthalten.

2. Bezeichnungen und Definitionen

O, O_L und o sind die bekannten Landau-Symbole (vgl. [3]). Wenn nichts Besonderes gesagt ist, soll der Folgenindex von 0 an laufen, und statt $x_n \to \xi$ für $n \to \infty$ schreiben wir nur $x_n \to \xi$. Die Funktionen p und p_s sowie die Folgen $\{P_n\}$ und $\{t_n\}$ haben stets die Bedeutung wie in (1.1) bis (1.4).

Das zum Abel-Verfahren A gehörende Verfahren M_p ist das *Cesàro-Verfahren* der Ordnung 1. Für $\alpha > 0$ und $p_n := \binom{n+\alpha-1}{n}$ ist J_p das *verallgemeinerte Abel-Verfahren* A_α (A_1 ist das Abel-Verfahren). Für $p_n := (n+1)^{-1}$ sind J_p und M_p die *logarithmischen Verfahren* L und l. Für $\alpha > 0$ und $p(x) := [-x^{-1} \ln (1-x)]^\alpha$ ergeben sich die *verallgemeinerten logarithmischen Verfahren* L_α und l_α. In einer anderen Richtung werden L und l von PHILLIPS [20] verallgemeinert. (Bei diesen Verfahren gilt $p_n = 0$ für $0 \leqq n < n_0$. Wir betrachten die M_p-Transformierte $\{t_n\}$ dann nur für $n \geqq n_0$.)

3. Schmidtsche Bedingungen für $\{s_n\}$

Es sei $r \geqq 0$ eine reelle Konstante. Wir betrachten die Bedingung

$$(3.1(\mathrm{r})) \qquad \liminf (s_n - s_m) \geqq -r \quad \text{für} \quad P_n/P_m \to 1 \quad (n > m \to \infty)$$

sowie, falls die s_n komplex sind, die Bedingung

$$(3.2(\mathrm{r})) \qquad \limsup |s_n - s_m| \leqq r/\sqrt{2} \quad \text{für} \quad P_n/P_m \to 1 \quad (n > m \to \infty)$$

und beweisen zunächst einige Sätze über M_p.

3.1. Satz. *Gilt*

$$(3.3) \qquad P_{n+1}/P_n \to 1$$

und (3.1(r)) (*bzw.* (3.2(r))), *so folgt aus* M_p-$\lim s_n = \sigma$ *stets* $\limsup |s_n - \sigma| \leqq r$.

Beweis. Es genügt, den Satz für reelle s_n und $\sigma = 0$ zu beweisen. Wegen (3.1(r)) gibt es Zahlen $\delta > 0$ und $M \in \mathrm{N}$ so, daß

$$(3.4) \qquad s_n - s_m \geqq -r - \varepsilon \quad \text{für} \quad P_n/P_m \leqq 1 + \delta \quad \text{und} \quad n > m > M$$

gilt. Darüber hinaus können n und m wegen $P_n \to \infty$ und (3.3) so gegen ∞ streben, daß für ein geeignetes $M_0 > M$

$$(3.5) \qquad 1 + \delta/2 \leqq P_n/P_m \leqq 1 + \delta \quad \text{für} \quad m > M_0$$

gilt. Damit folgt für $n > m > M_0$ nach (3.4) zunächst

$$P_n t_n - P_m t_m = \sum_{\nu = m+1}^{n} p_\nu s_\nu \leqq (s_n + r + \varepsilon)(P_n - P_m),$$

also

$$\frac{P_n}{P_m} t_n - t_m \leqq (s_n + r + \varepsilon)\left(\frac{P_n}{P_m} - 1\right),$$

woraus sich wegen $t_n \to 0$ und (3.5) die Ungleichung $\liminf (s_n + r + \varepsilon) \geqq 0$, also, da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, $\liminf s_n \geqq -r$ ergibt. Entsprechend folgt $\limsup s_n \leqq r$ aus $P_n t_n - P_m t_m \geqq (s_m - r - \varepsilon)(P_n - P_m)$, insgesamt also $\limsup |s_n| \leqq r$.

3.2. Korollar. *Gilt* (3.3), *so ist* (3.1(0)) (*bzw.* (3.2(0))) *eine* TB *vom* $M_p \to$ $\to c$-Typ.

Kwee [15; Lemma 1] formuliert den reellen Teil von Korollar 3.2 ohne die Voraussetzung (3.3). Das Beispiel

$$p_{2k} := 2^k, \quad p_{2k+1} := 0, \quad s_{2k} := 0, \quad s_{2k+1} := 1 \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

zeigt jedoch, daß man auf (3.3) nicht verzichten kann: Für die so definierte divergente Folge $\{s_n\}$ ist offensichtlich M_p-$\lim s_n = 0$. Ferner ist $P_{2k} = P_{2k+1} = 2^{k+1} - 1$

für $k=0, 1, \dots$, also gilt (3.3) nicht, wohl aber $(3.1(0))$, denn $P_n/P_m \to 1$ $(n>m\to\infty)$ ist genau dann erfüllt, wenn von einer Stelle an $n=m+1=2k+1$ gilt, und es ist $s_n - s_m = 1$ für $n=m+1=2k+1$.

Eine im folgenden ständig wiederkehrende Bedingung ist

$$(3.6)\qquad 1 \leqq \frac{P_n}{P_m} \to 1 \quad \text{für} \quad 1 < \frac{n}{m} \to 1 \quad (m \to \infty).$$

Gilt (3.6), so folgt aus $(3.1(r))$ offensichtlich

$$(3.7(r))\qquad \liminf (s_n - s_m) \geqq -r \quad \text{für} \quad n/m \to 1,$$

und aus $(3.2(r))$ ergibt sich

$$(3.8(r))\qquad \limsup |s_n - s_m| \leqq r/\sqrt{2} \quad \text{für} \quad n/m \to 1.$$

Unter der Voraussetzung (3.6) sind die Bedingungen $(3.7(r))$ und $(3.8(r))$ also nicht stärker als $(3.1(r))$ bzw. $(3.2(r))$. Aus (3.6) folgt auch (3.3), und der Beweis von Satz 3.1 zeigt:

3.3. Satz. *Gilt* (3.6) *und* $(3.7(r))$ (*bzw.* $(3.8(r))$), *so folgt aus* M_p-$\lim s_n = \sigma$ *stets* $\limsup |s_n - \sigma| \leqq r$.

3.4. Korollar. *Gilt* (3.6), *so ist* $(3.7(0))$ (*bzw.* $(3.8(0))$) *eine* TB *vom* $M_p \to$ $\to c$-Typ.

Spezialfälle der Korollare 3.2 und 3.4 finden sich bei Kwee [12; Lemma 3] (für $M_p = l$) und [14; Theorem 4], Phillips [20, Lemma 3] und Jakimovski and Tietz [8; Theorem 6.1].

Der Beweis von Satz 3.1 zeigt, daß man in den Sätzen 3.1 und 3.3 immer noch $s_n = O(1)$ erhält, wenn man die Voraussetzung M_p-$\lim s_n = \sigma$ zu $t_n = O(1)$ abschwächt. Zum Beweis des nächsten Satzes benötigen wir eine Variante eines bekannten Satzes von Vijayaraghavan.

3.5. Lemma (vgl. Rangachari [21; Lemma 1]). *Ist* $c_n(t) := p_n e^{-n/t}/p(e^{-1/t})$ *für* $n=0, 1, \dots$ *und* $t>0$, *gibt es eine positive, streng monoton gegen* ∞ *strebende Funktion* f: $(0, \infty) \to \mathbf{R}$ *mit* $f(t+1) - f(t) \to 0$ *für* $t \to \infty$,

$$(3.9)\qquad \sum_{n=0}^{M} c_n(t) \to 0 \quad \textit{für} \quad f(t) - f(M) \to \infty \quad (t > M \to \infty),$$

$$(3.10)\qquad \sum_{n=N}^{\infty} c_n(t)[f(n) - f(N)] \to 0 \quad \textit{für} \quad f(N) - f(t) \to \infty \quad (N > t \to \infty),$$

und existieren, bei vorgegebener Folge $\{s_n\}$, *zur Funktion*

$$s(t) := s_n \quad \textit{für} \quad n \leqq t < n+1 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

Konstanten $a>0$, $b>0$ *mit*

(3.11) $$s(t)-s(u) > -a[f(t)-f(u)]-b \quad \textit{für} \quad t>u>0,$$

so folgt aus $p_s(x)/p(x)=O(1)$ *für* $x\to 1-$ *auch* $s_n=O(1)$.

3.6. Satz. *Gilt* (3.3),

(3.12) $$P_{2n}=O(P_n)$$

und (3.1(r)) (*bzw.* (3.2(r))), *so folgt aus* $p_s(x)/p(x)=O(1)$ *für* $x\to 1-$ *auch* $s_n=O(1)$.

Beweis. Es genügt, den Satz für reelle s_n zu beweisen. Sei also $\{s_n\}$ eine reelle Folge mit (3.1(r)) und $p_s(x)/p(x)=O(1)$ für $x\to 1-$. Wir definieren $c_n(t)$ und $s(t)$ wie in Lemma 3.5. Ferner sei

(3.13) $$f(t):=\ln P_{[t]} \quad \text{für} \quad 0<t<\infty.$$

Dann ist f: $(0,\infty)\to\mathbf{R}$ eine positive (wir dürfen ohne Einschränkung der Allgemeinheit $p_0>1$ annehmen), monoton (aber nicht streng monoton) gegen ∞ strebende Funktion mit $f(t+1)-f(t)\to 0$ für $t\to\infty$, die, wie gleich gezeigt wird, auch (3.9) bis (3.11) erfüllt. Zu f gibt es dann eine Funktion g, die neben den soeben aufgezählten Eigenschaften von f auch noch streng monoton ist und damit alle Eigenschaften besitzt, die in Lemma 3.5 (von f) verlangt werden. Demnach genügt es zum Beweis des Satzes noch zu zeigen, daß f aus (3.13) die Bedingungen (3.9) bis (3.11) erfüllt. Zu (3.9): Es gilt

(3.14) $$f(t)-f(M)\to\infty \Rightarrow P_{[t]}/P_M\to\infty.$$

Ferner ist nach Borwein and Kratz [1; Lemma 3(i)]

$$P_{[t]} \leqq \inf\{p(x)/x^{[t]}\colon\ x\in(0,1)\},$$

also insbesondere $P_{[t]}\leqq p(e^{-1/t})e$ für jedes $t>0$, woraus sich, zusammen mit (3.14),

$$\sum_{n=0}^{M} c_n(t) \leqq \frac{P_M}{p(e^{-1/t})} = \frac{P_M}{P_{[t]}}\cdot\frac{P_{[t]}}{p(e^{-1/t})} = o(1) \quad \text{für} \quad f(t)-f(M)\to\infty\ (t>M\to\infty)$$

ergibt. Zu (3.10): Aus

$$f(N)-f(t)\to\infty \Rightarrow P_N/P_{[t]}\to\infty$$

folgt wegen (3.12)

(3.15) $$f(N)-f(t)\to\infty \Rightarrow N/t\to\infty.$$

Ferner ist (vgl. [28; Lemma 2b)])

(3.16) $$p(e^{-1/N}) = O(P_N) \quad \text{für} \quad N\to\infty.$$

Gilt nun $f(N)-f(t)\to\infty$ $(N>t\to\infty)$, so wählen wir nach (3.15) ein $t_0>0$ so, daß $N>2t$ für $t>t_0$ gilt. Wir erhalten dann für $t>t_0$

$$\sum_{n=N}^{\infty} c_n(t)\,[f(n)-f(N)] = \frac{1}{p(e^{-1/t})}\sum_{n=N+1}^{\infty} p_n e^{-n/t}\ln\frac{P_n}{P_N} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{P_N\,p(e^{-1/t})}\sum_{n=N+1}^{\infty} p_n e^{-n/t}(P_n-P_N) = \frac{1}{P_N\,p(e^{-1/t})}\sum_{\nu=N+1}^{\infty} p_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} p_n e^{-n/t} =$$

$$= \frac{1}{P_N\,p(e^{-1/t})}\sum_{\nu=N+1}^{\infty} p_\nu e^{-\nu/t}\sum_{n=\nu}^{\infty} p_n e^{-(n-\nu)/t} \leqq \frac{p(e^{-1/N})}{P_N\,p(e^{-1/t})}\sum_{\nu=N+1}^{\infty} p_\nu e^{-\nu/t} e^{\nu/N} =$$

$$= \frac{p(e^{-1/N})}{P_N\,p(e^{-1/t})}\sum_{\nu=N+1}^{\infty} p_\nu e^{-\nu/2t} e^{-\nu(N-2t)/2Nt} \leqq \frac{p(e^{-1/N})}{P_N\,p(e^{-1/t})}\sum_{\nu=N+1}^{\infty} p_\nu e^{-\nu/2t} e^{1-N/2t} \leqq$$

$$\leqq \frac{p(e^{-1/N})}{P_N}\cdot\frac{p(e^{-1/2t})}{p(e^{-1/t})} e^{1-N/2t} = o(1) \quad \text{für} \quad f(N)-f(t)\to\infty \quad (N>t\to\infty),$$

wenn wir (3.15) und (3.16) beachten sowie $p(x)/p(x^2)=O(1)$ für $x\to 1-$, was aus $P_n\to\infty$ und (3.12) folgt (vgl. KRATZ and STADTMÜLLER [11; Lemma 2, proof of (vii)$\Rightarrow$(viii)]). Zu (3.11): Wegen (3.3) und (3.1(r)) gibt es nach MIKHALIN [18; Lemma 2] positive Konstanten a und b mit

$$s(t)-s(u) \geqq -a\ln(P_{[t]}/P_{[u]})-b \quad \text{für} \quad t>u>0,$$

womit alles gezeigt ist.

Spezialfälle von Satz 3.6 finden sich bei DAVYDOV [2; Sätze 6 und 7] (für $J_p=A$), JEYARAJAN [9; Theorem 1] (für $J_p=A_\alpha$. In diesem Fall ist $P_n/P_m\to 1$ äquivalent zu $n/m\to 1$) und Mikhalin [18; Satz 2].

In Satz 3.6 darf (3.3)$\wedge$(3.12) durch (3.6) ersetzt werden, denn (3.6) ist äquivalent zu (3.12)$\wedge$

$$\lim_{t\to 1-}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{P_n}\sum_{tn<k\leqq n} p_k = 0 \tag{3.17}$$

und ist auch äquivalent zu (3.12)$\wedge$

$$\lim_{t\to 1+}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{P_n}\sum_{n<k\leqq tn} p_k = 0 \tag{3.18}$$

(vgl. STADTMÜLLER and TRAUTNER [25]). Ferner wird (3.6) durch

$$np_n = O(P_n) \tag{3.19}$$

impliziert, darf also als Voraussetzung immer durch die stärkere, aber oft bequemere Bedingung (3.19) ersetzt werden.

Da unter der Voraussetzung (3.6) die Bedingung $s_n=O(1)$ eine TB vom $J_p\to$ $\to M_p$-Typ ist (TIETZT und RAUTNER [29; Korollar 4. 2]), erhalten wir aus Satz 3.6 unmittelbar:

3.7. Satz. *Gilt* (3.6), *so ist* (3.1(r)) (*bzw.* (3.2(r))) *eine* TB *vom* $J_p \to M_p$-Typ.

Spezialfälle von Satz 3.7 finden sich bei KOKHANOVSKII [10; Satz 5] (für $L \to l$) und TESLENKO [27; Satz 4] (für $L_\alpha \to l_\alpha$).

Aus den Sätzen 3.1 und 3.7 erhalten wir das folgende Analogon zu Satz 3.1 für J_p.

3.8. Korollar. *Gilt* (3.6) *und* (3.1(r)) (*bzw.* (3.2(r))), *so folgt aus* J_p-$\lim s_n = \sigma$ *stets* $\limsup |s_n - \sigma| \leqq r$.

Spezialfälle von Korollar 3.8 finden sich bei DAVYDOV [2; Sätze 6 und 7] (für $J_p = A$. Nach Davydov gilt für $J_p = A$ auch im komplexen Fall $\limsup |s_n - \sigma| \leqq \leqq r/\sqrt{2}$), KOKHANOVSKII [10; Satz 6] (für $J_p = L$), TESLENKO [27; Satz 5] (für $J_p = L_\alpha$) und MIKHALIN [18; Satz 2]. Für $r = 0$ erhalten wir aus Korollar 3.8 schließlich die in der Einleitung angekündigte Verallgemeinerung von Satz S:

3.9. Satz. *Gilt* (3.6), *so ist* (3.1(0)) (*bzw.* (3.2(0))) *eine* TB *vom* $J_p \to c$-Typ.

Neben Satz S (vgl. auch VIJAYARAGHAVAN [30]) enthält Satz 3.9 als Spezialfälle Resultate von LANDAU [16; § 3] (für $J_p = A$), KWEE [12; Theorem A] (für $J_p = L$), [14; Theorem 8] (für $J_p = L_\alpha$) und [15; Theorem A]. (Die dortige Voraussetzung $p(x)/p(x^2) \to 1$ für $x \to 1-$ impliziert $P_{2n}/P_n \to 1$ (vgl. [29; Nr. 5]) und damit (3.6)), JEYARAJAN [9; Theorem 4] (für $J_p = A_\alpha$), PHILLIPS [20], SONI [24; Theorem 2] und JAKIMOVSKI and TIETZ [8; Theorem 6.3].

Die durch den Vergleich mit Korollar 3.4 nahegelegte Frage, ob in Satz 3.9 die Bedingungen (3.1(0)) und (3.2(0)) durch (3.7(0)) bzw. (3.8(0)) ersetzt werden dürfen, muß offen bleiben.

4. Umkehrbedingungen vom O_L- und O-Typ

Neben den in der Einleitung genannten generellen Voraussetzungen verlangen wir jetzt $p_n > 0$ für $n = 0, 1, \dots$. Als einfache Folgerung aus Satz 3.9 erhalten wir die angekündigte Verallgemeinerung von Satz HL:

4.1. Satz. *Gilt* (3.6), *so ist* $P_n a_n = O_L(p_n)$ (*bzw.* $P_n a_n = O(p_n)$) *eine* TB *vom* $J_p \to c$-Typ.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß (3.1(0)) aus $P_n a_n = O_L(p_n)$ folgt. Wählen wir $K > 0$ mit $a_n > -K p_n / P_n$ für $n = 0, 1, \dots$, so gilt

$$s_n - s_m > -K \sum_{\nu=m+1}^{n} \frac{p_\nu}{P_\nu} \geqq -K\left(\frac{P_n}{P_m} - 1\right) \quad \text{für} \quad n > m,$$

woraus sich (3.1(0)) ergibt.

Neben Satz HL enthält Satz 4.1 als Spezialfälle Resultate von ISHIGURO [5] (für $J_p=L$ und o statt O), RANGACHARI and SITARAMAN [22; Theorems I(A) und I(L)] (für $J_p=A_\alpha$ und $J_p=L$), ISHIGURO [6] und [7], ŠTĚPÁNEK [26], PHILLIPS [20], KOKHANOVSKII [10; Korollar 1] (für $J_p=L$), JAKIMOVSKI and TIETZ [8; Theorems 5.2 bis 5.4, 5.2* und 5.4*], TIETZ und TRAUTNER [29; Satz 4.4] und KRATZ and STADTMÜLLER [11; Theorem 2]. Insbesondere ist damit auch [8; Theorem 5.1], dessen Beweis einen Fehler enthält, bewiesen und gleichzeitig verallgemeinert.

Da J_p-$\lim s_n=\sigma$ stets J_P-$\lim t_n=\sigma$ impliziert (wobei J_P das durch die Folge $\{P_n\}$ definierte Potenzreihenverfahren sein soll), ergibt sich mit

$$Q_n := P_0+\ldots+P_n \tag{4.1}$$

aus Satz 4.1 unmittelbar:

4.2. Korollar. *Gilt*

$$1 \leqq \frac{Q_n}{Q_m} \to 1 \quad \textit{für} \quad 1 < \frac{n}{m} \to 1 \quad (m \to \infty), \tag{4.2}$$

so ist $Q_n(t_n-t_{n-1})=O_L(P_n)$ (*bzw.* $Q_n(t_n-t_{n-1})=O(P_n)$) *eine* TB *vom* $J_p \to M_p$-Typ.

5. Schmidtsche Bedingungen für $\{t_n\}$

An zwei Beispielen wollen wir zeigen, wie die Ergebnisse aus Nr. 3 weiter ausgebaut werden können. Dazu betrachten wir in Analogie zu (3.1(r)) und (3.2(r)) jetzt die Bedingungen

$$\liminf (t_n-t_m) \geqq -r \quad \text{für} \quad Q_n/Q_m \to 1 \quad (n>m\to\infty) \tag{5.1(r)}$$

und

$$\limsup |t_n-t_m| \leqq r/\sqrt{2} \quad \text{für} \quad Q_n/Q_m \to 1 \quad (n>m\to\infty) \tag{5.2(r)}$$

(mit Q_n aus (4.1)). Diese sind beziehentlich nicht schwächer als die in Analogie zu (3.7(r)) und (3.8(r)) gebildeten Bedingungen

$$\liminf (t_n-t_m) \geqq -r \quad \text{für} \quad n/m \to 1 \quad (n>m\to\infty) \tag{5.3(r)}$$

und

$$\limsup |t_n-t_m| \leqq r/\sqrt{2} \quad \text{für} \quad n/m \to 1 \quad (n>m\to\infty), \tag{5.4(r)}$$

denn wegen

$$\frac{n}{m}-1=\frac{n-m}{m}\frac{P_m}{P_m} \leqq \frac{P_{m+1}+\ldots+P_n}{mP_n} = \frac{Q_n-Q_m}{Q_m}\frac{Q_m}{mP_m} \leqq \frac{Q_n}{Q_m}-1 \quad \text{für} \quad n>m>0$$

folgt $n/m\to 1$ aus $Q_n/Q_m \to 1$.

Unter der Voraussetzung (4.2) ist (5.1(r)) äquivalent zu (5.3(r)) und (5.2(r)) ist äquivalent zu (5.4(r)). Beachten wir noch, daß J_p-lim $t_n=\sigma$ aus J_p-lim $s_n=\sigma$ folgt, so erhalten wir aus Satz 3.9:

5.1. Satz. *Gilt* (4.2), *so ist* (5.3(0)) (*bzw.* (5.4(0))) *eine* TB *vom* $J_p \to M_p$-Typ.

Spezialfälle von Satz 5.1 finden sich bei Kokhanovskii [10; Satz 1] (für $L\to l$) und Teslenko [27; Satz 1] (für $L_\alpha \to l_\alpha$).

In Satz 5.1 darf (4.2) durch (3.6) ersetzt werden, denn (3.6) impliziert (4.2): Aus (3.6) folgt nach Stadtmüller and Trautner [25] zunächst (3.12) und daraus

$$nP_n = O(Q_n) \tag{5.5}$$

(vgl. Mikhalin [19]). Wählen wir danach ein $K>0$ mit $nP_n/Q_n<K$ für $n=0, 1, \dots$, so gilt $K\cdot\ln(n/m)<1$ für hinreichend nahe bei 1 liegende Quotienten n/m. Für derartige $n>m>0$ gilt ferner

$$\frac{Q_n}{Q_m} = 1+\frac{1}{Q_m}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{kP_k}{Q_k}\frac{Q_k}{k} \leqq 1+K\frac{Q_n}{Q_m}\ln\frac{n}{m},$$

also $Q_n/Q_m \leqq [1-K\cdot\ln(n/m)]^{-1}$, woraus (4.2) folgt.

5.2. Korollar. *Gilt* (3.6), *so ist* (5.3(0)) (*bzw.* (5.4(0))) *eine* TB *vom* $J_p\to$ $\to M_p$-Typ.

Spezialfälle von Korollar 5.2 finden sich bei Kwee [13; Theorem 6] (für $L\to l$. Aus Kwees Bedingung

$$\liminf\,(t_n-t_m) \geqq 0 \quad \text{für} \quad P_n/P_m \to 1 \quad (n>m\to\infty) \tag{5.6}$$

folgt wegen (3.6) nämlich (5.3(0))) und bei Mikhalin [18; Satz 1].

Zum Vergleich von Korollar 5.2 mit Satz 3.7 sei noch bemerkt, daß die Bedingungen (5.3(0)) und (5.4(0)) nicht stärker sind als (3.1(r)) bzw. (3.2(r)). Nach Mikhalin [18; Lemma 3] folgt nämlich aus (3.3) und (3.1(r)) schon (5.6) und daraus (5.3(0)) wegen (3.6).

Literaturverzeichnis

[1] D. Borwein and W. Kratz, On relations between weighted mean and power series methods of summability, *J. Math. Anal. Appl.*, **139** (1989), 178—186.

[2] N. A. Davydov, The (*c*)-property of the Cesàro and Abel—Poisson methods and theorems of Tauberian type, *Mat. Sb.*, **60** *(1963), 185—206.*

[3] G. H. Hardy, *Divergent series* (Oxford, 1949).

[4] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Tauberian theorems concerning power series and Di-

richlet's series whose coefficients are positive, *Proc. London Math. Soc., (2)* **13** (1914), 174—191.

[5] K. Ishiguro, Tauberian theorems concerning the summability methods of logarithmic type, *Proc. Japan Acad.*, **39** (1963), 156—159.

[6] K. Ishiguro, A Tauberian theorem for (J, p_n) summability, *Proc. Japan Acad.*, **40** (1964), 807—812.

[7] K. Ishiguro, Two Tauberian theorems for (J, p_n) summability, *Proc. Japan Acad.*, **41** (1965), 40—45.

[8] A. Jakimovski and H. Tietz, Regularly varying functions and power series methods, *J. Math. Anal. Appl.*, **73** (1980), 65—84. Errata: **95** (1983), 597—598.

[9] P. A. Jeyarajan, A Tauberian theorem for the generalised Abel method of summability. I, *J. Indian Math. Soc.*, **36** (1972), 279—289.

[10] A. P. Kokhanovskii, Tauberian theorems for semicontinuous logarithmic methods of summation of series, *Ukrain. Mat. Ž.*, **26** (1974), 740—748. English translation: *Ukrain. Math. J.*, **26** (1974), 607—613.

[11] W. Kratz and U. Stadtmüller, Tauberian theorems for J_p-summability, *J. Math. Anal. Appl.*, **139** (1989), 362—371.

[12] B. Kwee, A Tauberian theorem for the logarithmic method of summation, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **63** (1967), 401—405.

[13] B. Kwee, Some Tauberian theorems for the logarithmic method of summability, *Canad. J. Math.*, **20** (1968), 1324—1331.

[14] B. Kwee, On generalized logarithmic methods of summation, *J. Math. Anal. Appl.*, **35** (1971), 83—89.

[15] B. Kwee, A Tauberian theorem for the (J, p_n) method of summation, *J. London Math. Soc., (2)* **5** (1972), 139—142.

[16] E. Landau, Über einen Satz des Herrn Littlewood, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **35** (1913), 265—276.

[17] J. E. Littlewood, The converse of Abel's theorem on power series, *Proc. London Math. Soc., (2)* **9** (1910), 434—448.

[18] G. A. Mikhalin, Theorems of Tauberian type for (J, p_n) summation methods, *Ukrain. Mat. Ž.*, **29** (1977), 763—770. English translation: *Ukrain. Math. J.*, **29** (1977), 564—569.

[19] G. A. Mikhalin, Generalization of Tauberian theorems for a class of (J, p_n)-summability, *Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika*, 1980, no. 4, 61—68. English translation: *Soviet Math.* (Iz. VUZ), **24**, no. 4 (1980), 69—76.

[20] R. Phillips, A Tauberian theorem for a scale of logarithmic methods of summation, *Canad. J. Math.*, **25** (1973), 897—902.

[21] M. S. Rangachari, Tauberian oscillation theorems for the summability methods of the Hardy family, *Indian J. Math.*, **22** (1980), 225—243.

[22] M. S. Rangachari and Y. Sitaraman, Tauberian theorems for logarithmic summability (L), *Tôhoku Math. J. (2)*, **16** (1964), 257—269. Correction: **17** (1965), 443.

[23] R. Schmidt, Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen, *Math. Z.*, **22** (1925), 89—152.

[24] K. Soni, Slowly varying functions and generalized logarithmic summability, *J. Math. Anal. Appl.*, **53** (1976), 692—703.

[25] U. Stadtmüller and R. Trautner, Tauberian theorems for Laplace transforms, *J. reine angew. Math.*, **311/312** (1979), 283—290.

[26] F. Štěpánek, A Tauber's theorem for (J, p_n) summability, *Monatsh. Math.*, **70** (1966), 256—260.

[27] L. S. Teslenko, Theorems of Tauberian type for a generalized semicontinuous logarithmic method of summability of series, in: *Approximation methods of mathematical analysis*, Kiev, Gos. Ped. Inst. (Kiev, 1976), pp. 108—119.

[28] H. Tietz, Tauberian theorems of $J_p \to M_p$-type, *Math. J. Okayama Univ.*, **31** (1989), 221—225.

[29] H. Tietz und R. Trautner, Tauber-Sätze für Potenzreihenverfahren, *Arch. Math.*, **50** (1988), 164—174.

[30] T. Vijayaraghavan, A Tauberian theorem, *J. London Math. Soc.*, **1** (1926), 113—120.

UNIVERSITÄT STUTTGART
MATHEMATISCHES INSTITUT A
7000 STUTTGART 80
BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND